# Limites des suites monotones

**Exercice 1** [ 02265 ] [Correction]
Soit $(u_n)$ une suite croissante de limite $\ell$. On pose

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

a) Montrer que $(v_n)$ est croissante.
b) Établir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.
c) En déduire que $v_n \to \ell$.

**Exercice 2** [ 02266 ] [Correction]
Soit $(u_n)$ une suite réelle convergente. Étudier la limite de la suite $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$.

**Exercice 3** [ 02267 ] [Correction]
Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée. On pose

$$v_n = \sup_{p \geq n} u_p \text{ et } w_n = \inf_{p \geq n} u_p$$

Montrer que les suites $(v_n)$ et $(w_n)$ possèdent chacune une limite dans $\mathbb{R}$ et comparer celles-ci.

**Exercice 4** [ 02268 ] [Correction]
[Somme harmonique] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$

En déduire que $\lim_{n \to \infty} H_n = +\infty$.

**Exercice 5** [ 02269 ] [Correction]
Soit $(H_n)$ la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

a) Montrer que $H_n \to +\infty$.
b) Soit $(u_n)$ une suite telle que $n(u_{n+1} - u_n) \to 1$. Montrer que $u_n \to +\infty$.

**Exercice 6** [ 02270 ] [Correction]
On pose

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$$

a) Exprimer $u_n$ à l'aide de nombres factoriels.
b) Montrer que la suite $(u_n)$ converge.
c) On pose

$$v_n = (n+1)u_n^2$$

Montrer que la suite $(v_n)$ converge. En déduire la limite de la suite $(u_n)$
d) Simplifier

$$\prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

et comparer ce produit à $u_n^2$.
e) En déduire que la limite $C$ de la suite $(v_n)$ est strictement positive.

**Exercice 7** [ 00300 ] [Correction]
Soient $a > 0$ et

$$u_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)$$

a) Montrer que si $a \geq 1$ alors $u_n \to +\infty$.
b) On suppose $0 < a < 1$. Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente. On pourra exploiter la majoration $1 + x \leq \mathrm{e}^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

# Corrections

**Exercice 1 :** [énoncé]

a)
$$v_{n+1} - v_n = \frac{nu_{n+1} - (u_1 + \cdots + u_n)}{n(n+1)} \geq 0$$
donc $(v_n)$ est croissante.

b)
$$v_{2n} = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{2n} + \frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{2n} \geq \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}$$

c) On a $v_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(v_n)$ croissante donc $(v_n)$ converge vers un réel $\ell' \leq \ell$.
La relation précédente, passée à la limite, donne $2\ell' \geq \ell + \ell'$ ce qui permet de conclure $v_n \to \ell$.

**Exercice 2 :** [énoncé]
$(u_n)$ converge donc $(u_n)$ est bornée. La suite $(v_n)$ est donc bien définie et elle-même bornée.
On a $v_{n+1} \leq v_n$ donc $(v_n)$ est décroissante et donc converge.
Posons $\ell = \lim u_n$ et $\ell' = \lim v_n$.
$v_n \geq u_n$ donc à la limite $\ell' \geq \ell$.
Si $\ell' > \ell$ alors $\ell' > \frac{\ell'+\ell}{2} > \ell$.
À partir d'un certain rang $v_n > \frac{\ell+\ell'}{2}$ et $u_n < \frac{\ell+\ell'}{2}$. Impossible. Il reste $\ell' = \ell$.

**Exercice 3 :** [énoncé]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\{u_p \mid p \geq n+1\} \subset \{u_p \mid p \geq n\}$$
donc $v_{n+1} \leq v_n$ et $w_{n+1} \geq w_n$.
Les suites $(v_n)$ et $(w_n)$ sont respectivement décroissante et croissante. De plus $w_n \leq v_n$.
La suite $(v_n)$ est décroissante et minorée par $w_0$ donc elle converge vers une limite $\ell$.
De même la suite $(w_n)$ converge vers une limite $m$. Enfin $w_n \leq v_n$ donne à la limite
$$m \leq \ell$$

**Exercice 4 :** [énoncé]
On a
$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$
$(H_n)$ est croissante car $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$.
Si $(H_n)$ converge vers $\ell$ alors $H_{2n} - H_n \to \ell - \ell = 0$. Ceci est impossible puisque $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
Par suite $(H_n)$ diverge, et puisque $(H_n)$ est croissante, $(H_n)$ diverge vers $+\infty$.

**Exercice 5 :** [énoncé]

a) Sachant $\ln(1+x) \leq x$, on a
$$\frac{1}{k} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$$
donc
$$H_n \geq \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1)$$
donc $H_n \to +\infty$.

b) Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,
$$n(u_{n+1} - u_n) \geq 1/2$$
On a alors
$$u_{n+1} - u_N \geq \sum_{k=N}^{n} u_{k+1} - u_k \geq \frac{1}{2} \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}(H_n - H_{N-1}) \to +\infty$$
puis $u_n \to +\infty$.

**Exercice 6 :** [énoncé]

a)
$$u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

b) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} \leq 1$$

donc $(u_n)$ est décroissante. Or $(u_n)$ est minorée par 0 donc $(u_n)$ converge.

c)

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1}\frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2$$

or $(n+2)(2n+1)^2 - 4(n+1)^3 = -3n-2 < 0$ donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$.
$(v_n)$ est décroissante et minorée par 0 donc $(v_n)$ converge.
Nécessairement $\lim u_n = 0$ car sinon $v_n = (n+1)u_n^2 \to +\infty$.

d) Par télescopage des facteurs

$$\prod_{k=2}^{2n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2n}$$

Parallèlement

$$u_n^2 = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right)\left(1-\frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{2}\prod_{k=2}^{2n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

e) On en déduit

$$(n+1)u_n^2 \geq \frac{(n+1)}{4n}$$

et donc $C \geq 1/4$.
On peut montrer que $C = 1/\pi$ en exploitant dès la première question la formule de Stirling (si celle-ci est connue...).

**Exercice 7 :** [énoncé]

a) Si $a \geq 1$ alors $u_n \geq 2^n \to +\infty$ donc $u_n \to +\infty$.

b) $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc $(u_n)$ est croissante. De plus

$$u_n \leq \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{a^2}\ldots\mathrm{e}^{a^n} = \exp\left(a\frac{1-a^n}{1-a}\right) \leq \exp\left(\frac{a}{1-a}\right)$$

donc $(u_n)$ est majorée et par suite convergente.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD